不可能

——一些智力玩具

Claus Michael Ringel (德国)

许多智力玩具和智力难题都具有数学背景, 描述其背后蕴涵的数学是有趣味有价值的. 数学教师应该意识到这一点, 从而可以使用智力玩具成为顿悟、提神和增强数学修养的来源之一. 毕竟一些数学概念可以用这种方式很好地解释. 当人们玩智力玩具时, 会遇到形形色色的智力障碍, 从而学会克服各种障碍的策略. 另外人们经常能够自由地改变智力玩具的复杂程度, 这就提供了一个思维的训练平台.

本文 [注 1] 着重考察一些与不可能问题相关的智力玩具. 当然, 许多智力玩具游戏第一眼看起来是不可能有解的. 但是过了一会儿, 人们就会意识到自己被愚弄了: 这些智力玩具都有解，并且常常是很简单的解. 本文选择一些真正不可能的智力玩具游戏, 和一些标榜为不可能的智力玩具游戏 (如第三节考虑的 "**不可能的榫头**"). 本文的主旨是讨论**可能 - 不可能**两个词在数学上如何应用. 我们将看到许多有趣的智力玩具可以很好地说明数学证明的必要性.

1. 15- 滑板

15- 滑板是一个智力难题, 它似乎是最古老的滑板智力玩具. 直到现在, 它仍被认为是由 Sam Loyd (一个著名的智力玩具设计者和智力玩具书籍作者) 设计的最成功的智力玩具. 根据资料记载, 它在 1865 年 10 月由国际卡片公司 (伦敦) 投入市场. 可以肯定的是, 至少在 Rubik 魔方出现之前它对欧美机械类智力玩具产生的影响最大. 它最早被称为*Gem puzzel*或者*Boss puzzel*, 但后来被称为*15-puzzel*或*14-15-puzzel*. 在德国, 它用最开始的名字*Boss-puzzel*销售. 在法国, 则用名字*Jeu de taquin*(逗惹游戏). 光是比较不同的命名就已经很有趣了!

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

起始状态

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

目标状态

在 15- 滑板中, 这些标有从 1 到 15 数字的方块可以水平或竖直滑动, 但不能移出框架. 在起始状态, 我们可以把方块 12 往下滑动, 或者把方块 14 往右滑动, 等等. 要解答的问题是如何用一系列的滑动达到右图所示的目标状态: 方块 14 和 15 对调了, 其余不变. 据说 SamLoyd 悬赏 1000 美元 (在当时是一笔巨款) 征寻答案, 并且他声称这些钱存在纽约一家银行. 这在社会上引起了一场竭斯底里的狂热. [BS,T] 中讲述了许多不可思议的故事. 一个商店店主因为忙于尝试解决这个谜题忘了开店营业; 一个牧师在某个寒冷的冬天夜晚借着路灯玩 15- 滑板; 一个出版商外出吃午饭后没有回来, 午夜时分, 他的同事们在某个密室里找到他. 而他正用切成小片的蛋糕模拟 15- 滑板玩具在前后移动. 数学家兼国会议员 S. Günther 报告说, 1880 年左右许多有身份的德国国会成员坐在长椅上专注于 15- 滑板而根本没在听演说.

Sam Loyd 常常说起这样一个故事. 当他尝试为这个智力玩具申请专利时, 美国专利局向他询问游戏的解法. 于是, 他告诉美国专利局用数学方法可以证明这个游戏无解. 专利局拒绝授予专利，理由是**任何人都不能因不成立的东西而获得专利**.

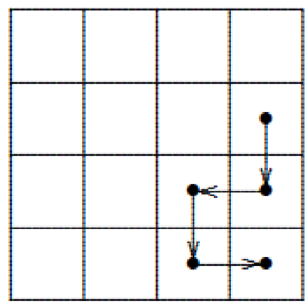
1.2 数学的分析. 正如 Loyd 已经指出的那样, 这个游戏无解. 下面简单介绍它的推理. 观察一串方块滑动的例子, 比如依次滑动方块 14, 11, 12, 8, 于是:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6&7&8\\\hline 9&10&11&12\\\hline 13&15&14&\\\hline\end{array} \overset{v_{14}}{\mapsto} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6&7&8\\\hline 9&10&11&12\\\hline 13&15&&14\\\hline\end{array} \overset{v_{11}}{\mapsto} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6&7&8\\\hline 9&10&&12\\\hline 13&15&11&14\\\hline\end{array} \overset{v_{12}}{\mapsto} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6&7&8\\\hline 9&10&12&\\\hline 13&15&11&14\\\hline\end{array} \overset{v_{8}}{\mapsto} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6&7&\\\hline 9&10&12&8\\\hline 13&15&11&14\\\hline\end{array}$$

如果把滑动方块 i 记为 v_i, 可以把刚刚考虑的一串方块滑动记为一串字符

$$v_8 v_{12} v_{11} v_{14},$$

注意到我们按数学中函数复合的方式从右往左读这串字符. 我们也可以把这一串方块滑动描绘成下面的箭图:



当然, 如果我们观察一长串的滑动, 相应的箭头是会重叠的.

让我们把空白区域记为数字 16.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	16

起始状态

1	2	3	4
5	6	7	16
9	10	12	8
13	15	11	14

移动 4 步后的状态

注意到滑动 v_i 不是别的, 正是交换数字 i 和数字 16 并保持其它数字位置不变的置换. 一个刚好交换两个数字的置换称为一个对换; 交换数字 i, j 的对换将记为 τ_{ij}, 于是 $v_i = \tau_{i,16}$.

总而言之, 我们看到我们涉及的是从数字 1 到 16 的置换, 并且我们感兴趣的是哪些置换可以由方块滑动得到. 让我们记 S_{16} 为所有从数字 1 到 16 的置换构成的集合 (或更确切地, 构成的群). 一个置换 π 常常表示为一个两行的表格, 上面一行按升序填上数

字 1 到 16, 下一行填上置换后的数字, 也就是序列 $\pi(1),\ldots,\pi(16)$. 利用这个记法, 置换 $\tau_{8,16}\tau_{12,16}\tau_{11,16}\tau_{14,16}$ 对应于表格

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 16 & 9 & 10 & 12 & 8 & 13 & 11 & 15 & 14 \end{pmatrix}$$

令 M 为可由 15- 滑板滑动方块所得到的所有置换的集合. 需要指出的是它并非一个子群, 而仅仅是一个子集. 这是因为, 一开始我们只能从 $\tau_{12,16}$ 或 $\tau_{14,16}$ 出发, 因为只有 12 和 14 与空白区域 16 相邻. 但在 $\tau_{14,16}$ 交换 14 和 16 后, 我们不能使用 $\tau_{12,16}$, 因为 12 和 16 不再相邻. 无论什么时候, $v_i=\tau_{i,16}$ 至多只有四个数字可以使用, 即那些与空白区域 16 相邻的数字 i. 实际上, 很难给出一个判断 S_{16} 中哪些元素属于 M, 哪些元素不属于 M 的一般准则. 幸运的是, 在我们下面的讨论中并不需要关于集合 M 的描述.

重要的是任何置换 π 可表成一些对换的乘积, 但这样一个乘积分解的表达方式不唯一.

我们的问题可以叙述如下.

问题: $\tau_{14,15}\in M$ **吗?**

这就是 15- 滑板玩具的**数学表述**. 注意到对换 $\tau_{14,15}$ 显然保持数字 16 不动. 设 U 为所有保持数字 16 不动的置换构成的集合, 这个子集 U 是一个子群 (我们很容易地把它与 S_{15} 等同起来). 考虑交集 $M\cap U$. 假如 $\tau_{14,15}\in M$, 则有 $\tau_{14,15}\in M\cap U$.

我们需要稍微多一点的数学理论. 我们已经说过任意置换 π 可以写成一些对换的乘积, 并且这样的乘积分解不唯一. 即使是固定对换的数目的前提下, 这样的表达式也不唯一. 但人们可以区别出偶置换和奇置换. 偶置换指的是在这样的分解中的对换数目总是偶数, 奇置换则为奇数. 下面的引理给出一个置换的奇偶性的特征.

引理. 一个置换是偶置换当且仅当对于 $1\le i,j\le n$, 满足 $i<j$ 且 $\pi(i)>\pi(j)$ 的数对 (i,j) 的数目是偶数.

这个引理并不难证明, 任何一个 “线性代数” 的第一年课程中通常都给出证明, 因为它在处理方阵的行列式中要用到.

回到 15- 滑板. 关键的断言是: **所有** $M\cap U$ **中的置换都是偶置换**. 证明: 考虑 $M\cap U$ 中的一个元素 $v_{i_m}\cdots v_{i_2}v_{i_1}$, 其中 $i_m\to i_{m-1}\to\cdots\to i_2\to i_1\to 16$ 是一串说明方块连续滑动的箭头. 这样我们处理的是 m 个滑动的复合. 考虑数字 16 的路径, 它上下前后移动,

总共 m 次 (事实上, 16 沿着箭头相反方向移动, 但这没有影响). 假设 16 向上移动了 a 次, 向左移动了 b 次. 但这样 16 必须向下移动 a 次, 向右移动 b 次才能回到起始位置. 总之我们看到 16 总共移动了 $m = 2a + 2b$ 次, 这是一个偶数.

另一方面, 从引理易知, **置换 $\tau_{14,15}$ 是奇置换**. 这正是我们证明所需要的. 如同 $\tau_{14,15}$ 这样的奇置换不能写成偶数个对换的乘积, 因而置换 $\tau_{14,15}$ 不能由滑动滑块得到. 属于 U(也就是保持 16 不动) 的置换需要偶数个滑动, 因而是偶的.

这样我们看到: 只交换数字 14 和 15 的位置是**不可能**的.

我们已经应用的是称为群论的一些思考. 群论是人们感兴趣的数学核心理论, 它的内容意义深远, 有时得到的结果是非常困难的. 幸运的是, 这里我们只需要一个非常基本的认识, 即上面的引理. 应该注意, 这个引理一点都不显然, 但它并不难证明.

更多的一些数学. 可以证明: 任何保持 16 不动的偶置换都属于 M. 于是 $M \cap U = A_{15}$, 其中 A_n 表示 S_n 中所有偶置换构成的集合. 这个等式本身很有兴趣. 但是, 我们上面考虑的不可能性断言只需要很容易建立的包含关系 $M \cap U \subseteq A_{15}$.

另外, 给出我们涉及的群所含元素的个数也许是有意思的:

$$|S_{16}| = 16! = 20.922.789.888.000$$
$$|S_{15}| = 15! = 1.307.674.368.000$$
$$|A_{15}| = \tfrac{1}{2}15! = 653.837.184.000$$

1.3. 变种. 15- 滑板已经有了许多变种. 15- 滑板要求提供只交换数字 14 和 15 的一串滑动序列, 这是一个不可能完成的任务. 将一个滑乱了的恢复到给定的起始位置, 也是一种玩法. 虽然耗费时间, 但显然是可以完成的任务. 还有, 两边版本都起了变化: 其中一边是某个良好的顺序排列, 另一边是完全杂乱无章的排序. 这里有一个用字母代替数字的版本:

R	A	T	E
Y	O	U	R
M	I	N	D
P	L	A	

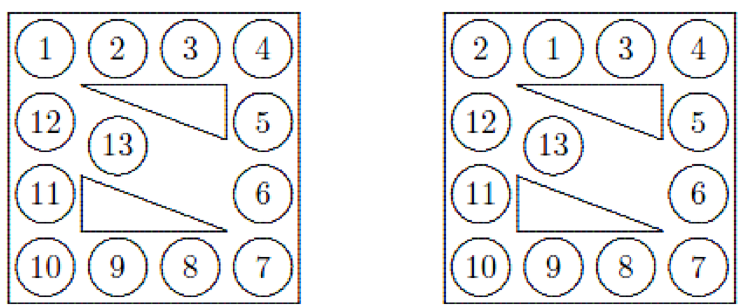
起始状态

R	A	T	E
Y	O	U	R
M	I	N	D
P	A	L	

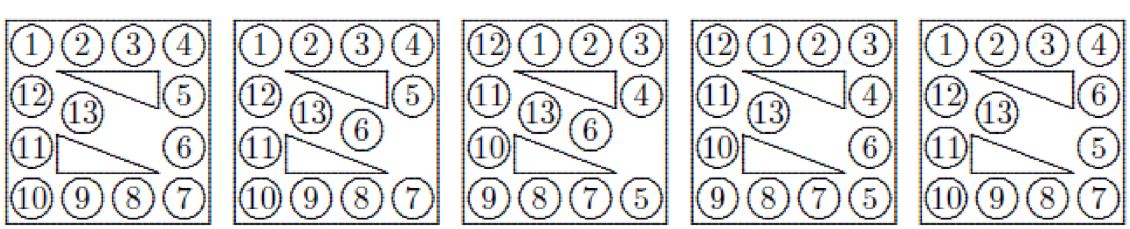
目标状态

令人惊讶的是, 这个问题**可以**解决. 为什么呢? 原因很简单: 字母 A 出现两次. 例如记第一行的为 A_1, 最后的为 A_2. 于是我们可以用这样一个置换, 它把 A_1 换到 L, L 换到 A_2, 再把 A_2 换成 A_1. 这是一个偶置换, 因此可以用方块滑动实现.

另一个滑板玩具: 十三滑板. 它是一个可以做到的智力玩具. 一个基于置换的, 提供娱乐和教学的科学滑板玩具. 约在 1906 年由波士顿的哥伦比亚新奇制造公司出品.



在十三滑板玩具中, 三角形是粘在底盘上的木块, 而标明数字的圆盘是可以移动的. 可以证明: 圆盘所有可能的置换都可以经过滑动实现. 例如, 可以用如下的滑动交换标号为 5 和 6 的圆盘.



用相似的方式, 所有对换都可以经过滑动实现. 从而所有置换都可以经过滑动实现.

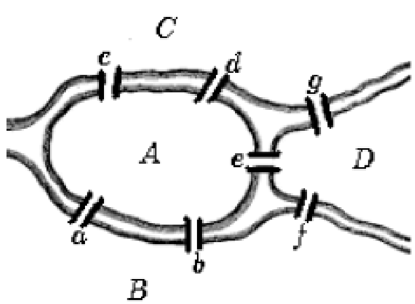
1.4. 回到 15- 滑板本身的历史. 最近, J.Slocum 和 Dic Sonneveld 的研究指出 Sam Loyd 并不是 15- 滑板的真正发明者. 研究结果表明: 15- 滑板是由一位名字叫 Noyes Palmer Chapman 的邮递员在 1874 年左右设计, 而且在 1879 年就开始生产了. Slocum 和 Sonneveld 的书的副标题是: "**迷人的真实故事: Sam Loyd 最成功的欺骗如何持续一个多世纪**".

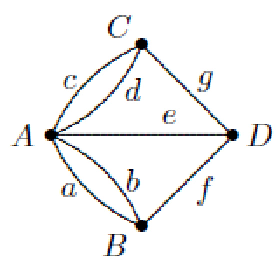
2. 数学证明的必要性

2.1 15- 滑板的详细分析对高中数学教学来说可能太繁杂. 但重要的是, 高中数学教学应该体现这样的深刻见解：正是数学能够证明某些事情是肯定不可能的, 不需要任何如果和但是. 下面是一些这样的问题, 大部分只是平面问题, 也就是人们只需要纸和笔, 可能还需要一把剪刀来裁剪纸张. (当然人们也可以用蛋糕块来移动它们).

A. 让我们从著名的 "哥尼斯堡 (Königsberg) 七桥问题" 开始. 它在 Euler 时代已经讨论. 而且 Euler 的解答被认为是图论的开始. "哥尼斯堡七桥问题" 是: 在哥尼斯堡有七座桥, 是否可能找到一种穿过城市的走法, 它恰好经过每一座桥一次.

如何证明这是**不可能**的? 首先我们用画图挑出关键的信息. 顶点表示被水隔开的城市的不同部分, 连接两个顶点的边的数目与连接城市相应部分的桥梁的数目相同. 如下图所示, 左边是河和桥的平面地图, 右边是相应的示意图. 城市的部分标记为 A, B, C, D, 桥梁则标记为 a, b, c, d, e, f, g.

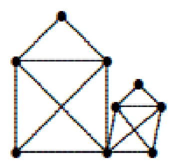




现在问题可以复述如下: 在图中是否存在一条刚好经过每条边一次的路, 这样的路称为 Euler 路. 为了证明这样的路不存在, 我们只需要计算一下每个顶点 x 的度数, 即连接

顶点 x 的边的数目. 易见, 顶点 A 的度数为 5, 其余三个顶点的度数为 3. 于是我们考虑的是四个度数为奇数的顶点的图. 注意到在 Euler 路中, 度数为奇数的顶点只能作为起点或终点，其余的所有顶点的度数必须为偶数.

观察顶点度数的方法解决了许多问题, 例如 “一笔画问题”: 人们能否不移开铅笔画图, 并且刚好经过每条线一次. 这就是寻找 Euler 路. 让我们考虑所谓的尼古拉 (Nicolaus) 的房子图, 甚至再加上一个稍微倾斜的室外厕所:

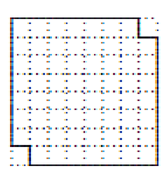
这是尼古拉的房子  这是加拿撒勒的厕所

注意到尼古拉的房子 (附加厕所也一样) 恰好有两个顶点的度数为奇数, 即在地基上靠外侧的两个点. 任一 Euler 路必须从这两点中的一点出发并且在另一点结束.

在图论中有一些基本结果可以用来说明某些问题不可能有解. 例如, 人们知道完全二部图 K_{33} 不是平面的. 这意味着, 给了 3 间房子和 3 个能量源, 如果人们要求管道之间不能相交, 那么人们无法将每个能量源接到每间房子.

图论上的考虑也可以用来寻找解决智力谜题的方法, 参见著作 [BCG].

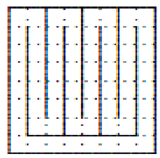
B. 让我们考虑一个棋盘, 但我们除去两个相对的角落方格, 留下 62 个方格, 如下图所示. 问题: 设一块多米诺骨牌可以覆盖两个相邻的方格, 并且不能有重叠, 那么是否可能用多米诺骨牌覆盖这 62 个方格?



答案再一次是**否定**的. 有许多不同的证明, 但最漂亮的似乎是下面这种证法 [注 2]. 考虑通常用黑色和白色将方格染色的棋盘. 我们已经切去了两个黑色方格, 于是剩下 32 个白色方

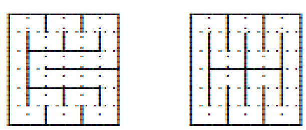
格和 30 个黑色方格. 任一块多米诺骨牌要恰好覆盖一个白色方格和一个黑色方格. 所以是不行的.

更一般地, 同理可以证明: 在我们的棋盘中除去两个同色的方格, 则不可能用 31 块多米诺骨牌来覆盖剩余的所有方格. 但是, 如果除去的两个方格一白一黑, 结论是肯定的. 除去任意一黑一白的一对方格, 用 31 个多米诺骨牌都可以覆盖其它所有方格! 为了理解这一点, 人们用所谓的格莫瑞 (Gomory) 栅栏 [G]. 例如:

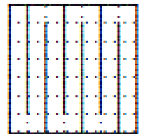


格莫瑞栅栏提供了一条方格的闭路, 它恰好有两种用多米诺骨牌覆盖的方法. 特别地, 易见, 任一偶数长度的真子路恰有一种用多米诺骨牌覆盖的方法. 于是, 如果我们删去两个不同色的方格, 那么我们得到一条长度为 62 的子路 (在两方块相邻时) 或者两条子路 (在两个方块不相邻时). 需要注意, 在第二种情况下两条子路两头都是不同色的方格, 因而它们的长度必定为偶数.

当然, 画格莫瑞栅栏的方法很多, 但这不影响我们的讨论. 我们的考虑可以应用到任一 $n \times n$ 的方格板上, 其中 n 为偶数. 这里是两个 $n = 6$ 时的格莫瑞栅栏的例子:



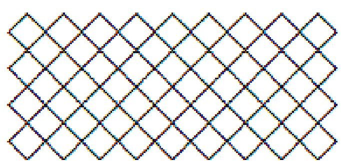
如果 n 为奇数会怎样? 我们再一次用染色棋盘, 但这时所有角落的四个方块有相同的颜色, 比如说为黑色. 如果我们像前面一样用多米诺骨牌覆盖, 一定会留下一个黑色方块. 我们可以先选好一块要留下的黑色方格! 证明中再一次用到格莫瑞栅栏, 这里有一个 $n = 7$ 的例子.



我们看到一条从左下角方格到右下角方格的路径 (当然不是一条闭路), 它的起点和终点都是黑色方格. 如果我们在棋盘中删去任一黑色方块, 我们或者得到一条偶数长度的子路, 或者得到两条路, 而且我们再次看到这两条路的长度必将是偶数. 这说明在删去任一黑色方块之后, 剩下的格可以用多米诺骨牌覆盖.

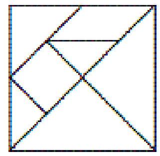
C. 考虑染色对我们寻找智力谜题的解法常常很有帮助. 例如对于 Piet Hein 设计的 Soma- 立方体, 人们可以用染色棋盘将单独小块可能位置的范围缩小. 或者用以说明某些形状不可能用 Soma 块来构造 (参见 [R], 第 2 部分和第 4 部分).

D. 下面是另外一个用不同方法来解答的覆盖问题. 问题: 下面的区域能否用 12 个五格拼板来覆盖? 参见 [G].



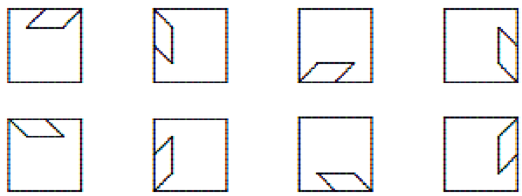
答案是否定的. 因为这 12 个五格拼板最多只能覆盖 21 个处于图案边界的正方形, 但是图中却有 22 个.

E. 现在让我们考虑七巧板. 七巧板是一个著名的智力玩具. 数学教学中很多情形都可以应用七巧板. 它由七块平面板组成, 一般的任务是用它们拼成各种不同的图形. 其中五块是等腰直角三角形, 有三种不同大小, 一块平行四边形和一块正方形, 它们可以按下面的方式拼成一个正方形.

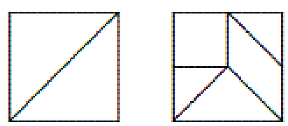


当讨论七巧板时，基本要求是七块板都要用到, 并且不能重叠.

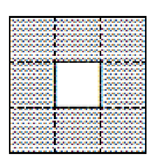
我们先讨论一些问题. 首先, 它们拼成一个正方形的可能有多少种? 答案是 8 种, 并且每一种情形都由平行四边形的位置决定. 8 种情形之间可以只通过旋转与反射互相变换. 特别地, 在对称 (旋转与反射) 的意义下, 只有唯一一种可能性. 下面列出了平行四边形所有可能的位置:



第二个问题: 如果拼成两个正方形有几种可能呢? 在对称意义下, 答案是 1 种:



第三个问题: 证明它们不可能拼成下面的图形:



我们还可以提出更多问题. 比如, 它们可以拼成多少个不同的凸边形? 答案是 13. 由七

巧板覆盖的最长线段是多少? 答案是 $2+7\sqrt{2}+\sqrt{5}$. 这个数字令人惊讶, 它不仅含有 $\sqrt{2}$ ($\sqrt{2}$ 在七巧板问题中无处不在), 而且 $\sqrt{5}$ 也起着重要的作用. 有关七巧板的进一步讨论, 可以参阅 [S1] 或 [R] 第 5 部分.

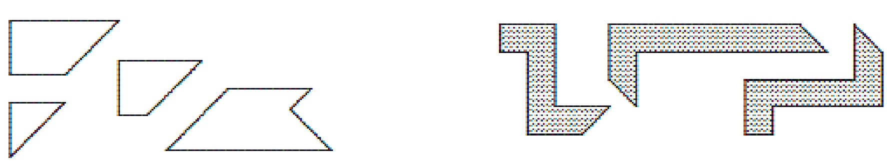
2.2. 数学教育最重要的任务之一是增长知识, 用以判断和区分数学上的可能与不可能. 一些看起来有解的问题事实上完全无解. 重要的和相关的事实必须严格证明. 玩智力玩具和智力难题提供许多讨论数学证明的必要性的机会. 智力玩具与智力难题通常营造出好玩的轻松的氛围, 但是其过程仍是扎实和严肃的.

我重申一下个人观点. 我认为, 高中阶段数学教学中有一部分专注于明确地提出断言与给出证明是至关重要的 [注 3]. 直到 20 世纪初, 欧美国家的几何教学通常基于欧几里得的框架, 这样提供良好的逻辑思维教育. 据说亚拉伯罕 · 林肯 (被认为是美国最伟大的总统之一) 为了准备成为一个律师, 在校学习时曾下决心学习了欧几里得写的前六本书, 他想要理解数学证明的本质. 他认为, **如果不懂得论证意味着什么, 就不可能成为一个律师**.

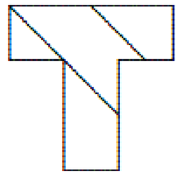
除了几何定理之外, 代数与数论的专题也提供了熟悉数学证明的机会. 经典的例子是证明 $\sqrt{2}$ 是一个无理数, 即 $\sqrt{2}$ 不能表成两个整数的商, 以及存在无限多个素数.

像德国这样的一些国家目前有一种 “时尚” 的倾向, 在数学课程中废除对公理的思考. 对于增进理解数学真谛, 提升对各种断言的真伪判断力而言, 这种倾向是很危险的. 用好玩的智力玩具做为补救似乎是很奇妙的.

2.3 发散思维 让我指出两个有解的问题来结束本节. 被称之为 T- 魔板与 E- 魔板的解不是很自然的, 以至于人们一开始都会怀疑它们是否有解. T- 魔板只用到三块板, E- 魔板用四块 [注 4]. 它们的目的是将给定的几块板分别拼成大写的拉丁字母 T 和 E, 如魔板的名字所提示的.



寻找到这个问题的解需要一些灵活的思维. 下面我们给出 T- 魔板的解. 困难在于从 T- 型板分割成 4 小块的方法超出人们的惯性思维 [注 5].



处理这样的问题, 常常需要发散性思维. 或许, 从另外一个方面来说, 解决这样的难题可以很好地训练我们的发散性思维. 发散性思维就是寻求出人意外的简介和异于常规的思路, 进而打开心智的死结. 发散性思维这个术语是 Edward de Bono [dB]1967 年提出的. 为了解析发散性思维的概念, 我们给出由 Mel Stover 提出的一些趣题 [注 6]. Mel Stover 发明了许多有意思的智力玩具, (他卒于 1999 年).

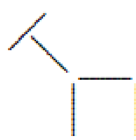
1. 在等式

$$26 - 63 = 1$$

中, 只改变一个数字的位置, 使得等式成立.

2. Tom 的妈妈有四个孩子, 其中三个是女儿, 她们的名字分别是 Spring, Summer, 与 Autumn. 那么第四个孩子叫什么?

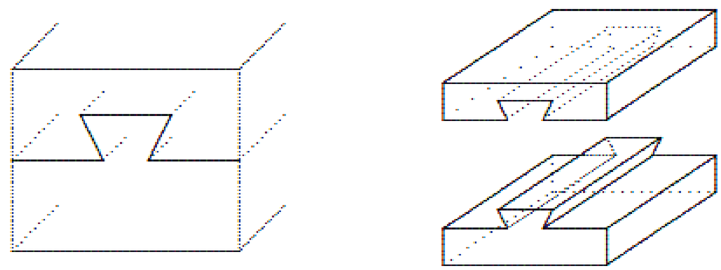
3. 下面是用火柴或者牙签组成的一只长颈鹿的图案. 只移动其中一根火柴或牙签, 使得这只长颈鹿发生旋转或者反射.



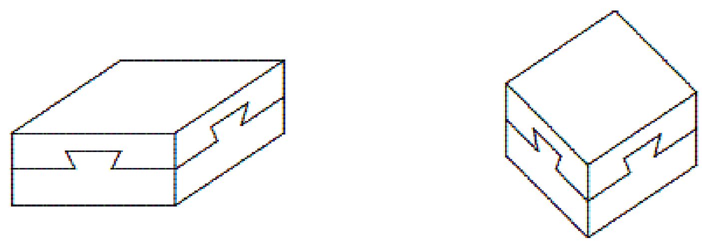
现在让我们回到 E- 魔板. 首先的想法是不可能用给定的那三个小块拼成大写的拉丁字母 E. 毕竟, 字母 E 只有三横一竖. 下一节我们给出一些应用非常规策略的例子. 当读者读完本文, 将发现 E- 魔板问题已经被解决了.

3. 不可能的楔形榫头

3.1 如下图所示, 楔形榫头是木工用以将两个木块拼接并交叉互锁. 使用梯形是为了连接的牢固. 这里的两个木块是沿着榫头方向通过滑行连接起来的.

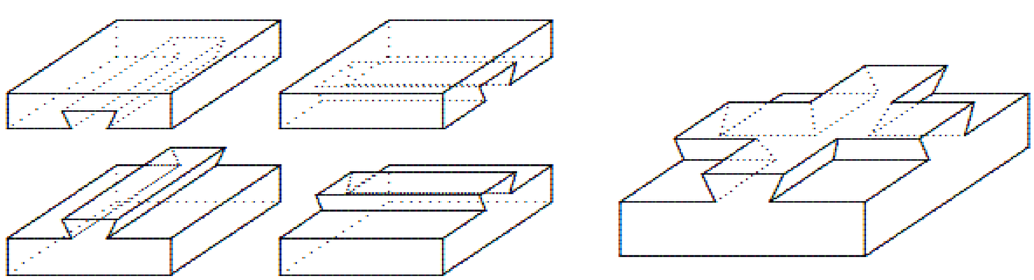


下面展示的是两个**不可能**的楔形榫头: 两块底座都是正方形的木块, 拼在一起后四个侧面完全一样, 人们看到的总是榫头的顶头.

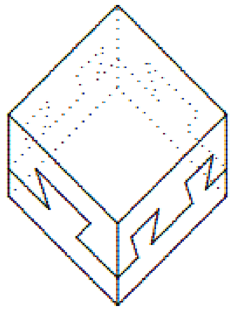


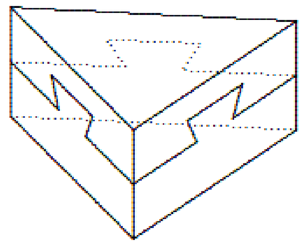
不经过挖洞, 不用挤压, 膨胀, 润湿等把戏, 用两块木块拼成这样的一个楔形榫头可能吗? 下面我们通过纯几何的构造来寻找解答.

人们一般都会认为我们是用与边缘平行的两个正交的榫头拼接起来, 如下图所示. 但是它们的组合产生了下面右图出现的十字交叉.

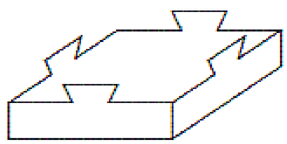


这当然是不可能的. 在讨论这个问题的解答之前, 我们先列出两个类似物体的外观图, 下面左图的底部是正方形, 右图的底部是正三角形.

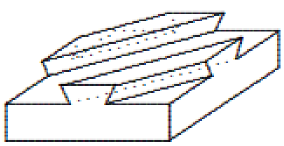


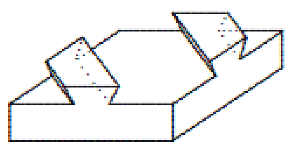


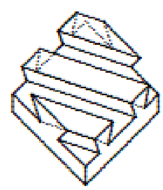
回到一开始的那个双楔形榫头. 让我们不要先入为主地来观察它的侧面图.



为什么榫头一定要平行于边缘呢? 实际上, 让榫头平行于对角线, 然后沿着对角线方向滑行进去, 就是很简单的一个解, 如下左边和中间的图所示.

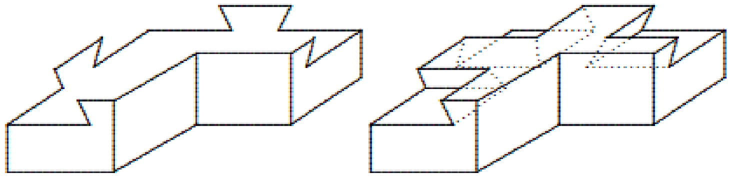




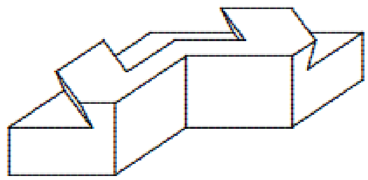


上图的右边是用同样的方法, 我们给出上面第二个具有正方形底座的楔形榫头的解.

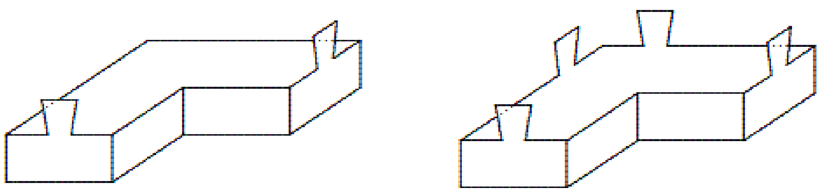
现在让我们来讨论由 Robert Sandfield 发展的由上述玩具的一些变化. Robert Sandfield 做了很多关于楔形榫头的实验, 见 [Sa] 与 [V]. 其中有三个是 L 型的. 下图左图是第一种变化的部分侧面图, 看起来这似乎是一个 “不可能” 的楔形榫头: 两个榫头平行于侧边互相正交, 并且形成一个十字交叉.



但是, 我们可以再次看到一个十分平凡的解, 如下图所示:

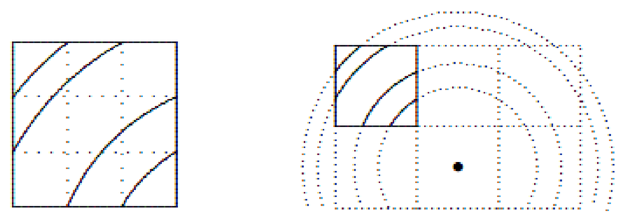


下面是另外两种 L- 型变化的一部分侧面图:

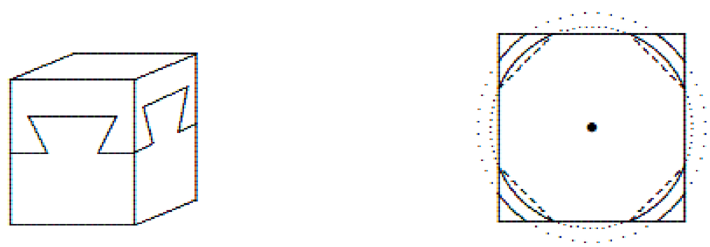


这里我们需要用到圆形榫头:

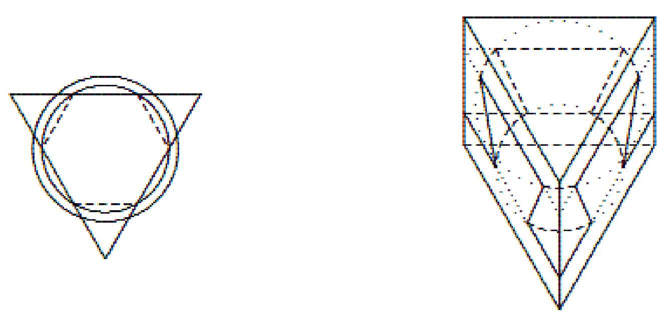
为了能够合适地滑行, 我们需要它们是同心圆! 下面我们展示其中之一的内部构造示意图:



我们回头看看本节开始提到的第一个“不可能”的楔形榫头问题. 应用刚刚提到的几何构造, 我们看到上面左图给出这个问题的另外一个解, 它用圆形榫头代替直的榫头. 但还有一个不同的解, 用同心圆插入, 如下图所示. 需要围绕圆心旋转 45 度, 方能拔开两个木块.



用这种方法, 我们也找到了底座是正三角形的楔形榫头问题的解.



3.2. 在讨论这些问题时, 我们能学到些什么?

首先, 它给我们提供了一种三维视图的适当的训练. 这同样是中学教育的一个非常重要任务. 传统上它被认为是数学教育的任务, 然而这些年在德国和许多其它国家都被削弱了. 同时, 这些对象很有美学的味道. 在讲述坐标几何的时候, 教师们可以考虑它们, 可以鼓励学生画出相应的图形, 不管用手工还是用 CAD 程序.

其次, 分析产生圆形榫头问题时, 我们立即发现, 它其实是将一条线 L 沿着一条与它相交但不垂直的直线 L' 旋转得到, 因此我们得到单叶双曲面的一部分 (应用于火力发电厂的冷却塔). 所以, 我们遇到的其实是数学领域中的二次曲面的内容, 而我认为它应该属于中学教育的基本知识范围.

第三, 我们应该意识到不可能的楔形榫头问题属于在其他地方没有适当地加以讨论的日常生活中的问题. 给出了三维物体的外观, 人们想要知道看不见的内部结构信息. 最简单的方法就是用一把锯子把这个物体锯开. 但是, 即使允许用锯子, 仍然需要十分小心. 因为锯了太多次之后, 这个物体可能完全被毁坏了, 我们也就无法认识它的内部结构了. 所以, 即使允许应用锯子, 我们也要先考虑该物体可能的内部结构, 选择一种合适的切割方法. 注意到许多从业人员每天都要面对这类问题. 比如一个内科医生, 他当然可能完全不使用锯子, 但肯定不能经常使用.

3.3. 我们用两个不可能楔形榫头问题的图来结束这节内容. 它们取自 E.M.Wyatt 写的《木头之智力玩具》和《木头之奇迹》两本书 [W1,W2]. 这两本书给出很多木质智力玩具的详细结构的说明书.

4. 进一步的课题.

从题目知道, 这个报告的注意力集中在不可能问题. 然而在第三节, 我们讨论了一些看起来不可能, 但实际上却容易解决的楔形榫头问题. 前两节的重点则在揭示真正不可能的事情, 以及提供相应的数学证明.

在日常生活中有很多其他不可能问题, 比如, 与物理, 化学, 生物规律相矛盾的问题, 或者在技术上看起来不可能存在的问题. 著名的可口可乐瓶被木箭穿透, 一个酒瓶中有一个比瓶口大的梨等等. 人们很好奇, 这些事情怎么可能发生呢? 其实, 人们可以用具有压缩性的软木头, 还有把梨子放到瓶子中让它长大. 我们指出这种思路的一些作用.

4.1. 时间逆转: 电影中为了表现被破坏的烟囱恢复原样, 直接拍恢复过程几乎是不可能的, 但是把烟囱的破坏过程倒着放却容易得多. 这样一个画面系列如何直接实现? 有一大批智力玩具保持着这种情形. 比如, 一个智力玩具分拆容易, 但是重组困难; 或者分拆困难, 但是重组容易. 比如子弹消失在迷宫中, 很难再把它找回来.

4.2. 用二维视图来感知三维物体. 存在不同的方式去解释描绘三维世界物体的绘图. 人们可以组合容易认识的小的片段来形成现实世界中不可能实现的完整图案. 我们把二维呈现 (在一张纸上) 的解释作为对三维物体的描述 (在四维中的实现是没有问题的). M.C.Escher 以及他们的追随者有很多这类型的视图.(在 Escher 之前至少应提到 Otto Reutersvärd).

4.3. 大海捞针, 猜测 6 个数字来赢得彩票. 一方面, 这些任务很难达到, 几乎不可能. 但是每周都有一些人赢得彩票, 它的确是可能的.

这里没有涉及到统计学中罕见事件这样的技术问题. 当然, 它们中的一部分需要一个专题报告来讲. 本文选择的智力玩具是为了突出数学上的 "不可能" 概念. 重要的是要知道有些东西确确实实是不可能的, 要知道这种不可能性的证明. 另一方面, 我们也已看到, 可能有一些相关的问题实际上是有解的.

注 1: 这是 1999 年 12 月在德国 Bielefeld 市数学教学研讨班上报告的讲稿. 它是关于智力玩具年度系列报告的第 3 讲, 见 [R]. 这些报告总是安排在圣诞节之前. 在西方国家, 圣诞节是孩子们得到玩具作为礼物的时刻. 而且有许多智力玩具成为令人惊叹的礼物 — 不仅仅是对孩子们来说. 不幸的是, 只有一小部分这类智力玩具可以在任何时候买到. 但事实上有许多可以很容易地手工制作, 例如在课堂上. 因此这些讲义也提供了一些制作指南.

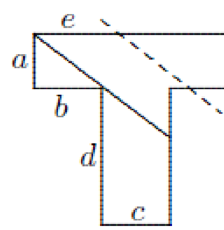
注 2: 在他的书*Elegance in Science*[Gl] 中, Ian Glynn 用这个问题作为开头, 他通过比较不同的证明方法解释了他的解法的优雅.

注 3: 但是, 显然并非所有人都赞成. 在德国, 当 1996 年 Heymann 提交了题为 "通识教育与数学" 的教授资格论文时, 产生了一个激烈的辩论. Heymann 主张选择需要数学的职业的学生和其他学生在接受数学教育时应该有差别 (说从 14 岁开始). 他罗列了认为是公共通识内容的数学内容清单, 明确地排除了二次方程和三角函数, 他根本没有提及对数学

证明的理解.

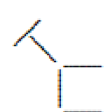
注 4: 通常, 块数的增加会很大程度上增加寻找答案的难度. 块数少的有趣的智力玩具相当罕见, 但通常真正令人着迷.

注 5: 实际上,T- 魔板的多个版本由不同的公司推出销售. 它们的共同之处是对角线的切线将 T 型分为三块, 其中一块是三角形. 第二条切线与第一条平行.



但是它们的区别在于决定 T 型的参数 a, b, c, d 和决定第二切线的参数 e 有所不同. 最具有挑战性的版本是选择 a, b, c 的长度相等, 且 $d = 2a$. 在这种情况下, 对 e 的选择仍然存在两种可能. 如果 $e = \sqrt{2}$, 则四个小块的宽度为 a. 如果 $e = \frac{3}{2}$, 则第二切线切出的两块可以重新组合成平行四边形.

注 6: 见 [Ga]. 答案是: $2^6 - 63 = 1$, Tom, 和



当观察火柴图形时, 注意到反射的轴线是明显的, 它敲好是长颈鹿的脖子. 但是对于反射来说, 这样的方向上的反射似乎相当不常见.

参考资料和进一步阅读的建议:

[BS] J. Botermans, J. Slocum: Puzzles Old and New: How to Make and Solve Them. Washington 1988.

[BCG] E.R. Berlekamp, J.H. Conway, R.K.Guy: Winning Ways for Your Mathematical Plays, Volume 4. BT, revised edition 2004.

[dB] E. de Bono: Lateral thinking: creativity step by step. Harper and Row. 1970.

[E] J. Elffers, Tangram. DuMont. Köln 1973.

[Ga] M. Gardner: Mel Stover. In: Puzzler's Tribute: A Feast for the Mind (ed D. Wolfe, T. Rogers) Wellesley 2001.

[Gl] I. Glynn: Elegance in Science. The Beauty of Simplicity. Oxford University Press (2010).

[Go] S.W. Golumb. Polyominoes. Puzzles, Patterns, Problems, and Packings. Princeton University Press. Princeton. ^{2}1994.

[R] C.M. Ringel. Denkspiele aus aller Welt 1 - 11, Bielefeld 1997 - 2010, see http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/∼ringel/general.html

[Sa] R. Sandfield: Comments on Dovetails. Cubism For Fun 47. 1998, 36-38.

[Sl] J. Slocum: The Tangram Book. Sterling Publishing Co., New York 2003.

[SB] J. Slocum, J. Botermans: New Book of Puzzles. Freeman. New York 1992.

[SS] J. Slocum, D. Sonneveld. The 15 Puzzle. Beverly Hills, Calif. 2006.

[T] R. Thiele: Das große Spielevergnügen. Hugendubel. München 1984.

[V] F. de Vreugd: Impossible Dovetail Joints. Cubism For Fun 43. 1997, p.6-7.

[W1] E.M. Wyatt: Puzzles in Wood. Bruce Publ. Co., Milwaukee, Wisc. 1928.

[W2] E.M. Wyatt: Wonders in Wood. Bruce Publ. Co., Milwaukee, Wisc. 1946.

[Z] Wei Zhang: Exploring Math through Puzzles. Berkeley 1996.

Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld,

POBox 100 131,

D-33 501 Bielefeld

Germany

E-mail address: **ringel@math.uni-bielefeld.de**

END