

什么是 Zometool 四维足球模型？

足球是我们生活中常见的一个形状，粗略看起来像一个球形，但仔细观察会发现，它实际上是由多个正五边形和正六边形组成的。这种结构也出现在了 C_{60} 碳分子上，是自然界中自然而然存在的形状。那么，从几何角度来看，这种结构到底是什么样的呢？

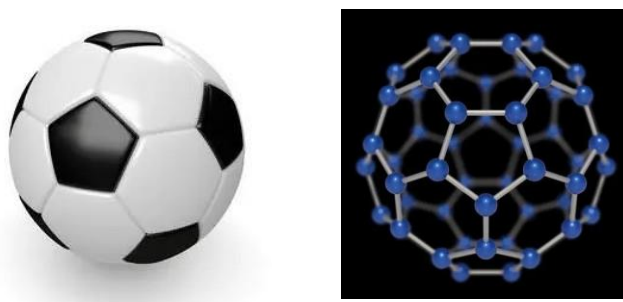


图 1：足球，碳分子

相比于正十二面体和正二十面体这种标准的正多面体，足球的形状并没有那么规则。它的表面由两种正多边形组成的，我们称之为均匀 (Uniform) 多面体。对于二维平面的情况，我们定义正多边形都是均匀的，从而可以开始进行递推定义：所谓 n 维的均匀立体，是指其表面都由 $(n - 1)$ 维的均匀立体组成的立体。这里注意到均匀立体的所有棱长一定一致。

再深入一步来看，足球这个多面体实际上是通过正二十面体的一种“截角” (Truncate) 操作得来的。具体来说，我们对正二十面体的所有 12 个顶点当成角落来进行截取，使得截去的部分形成新的边长与剩余部分的边长保持一致。这样得到

的新形状正是足球的形状。因此在几何上我们对足球有着更严格的称呼：截角正二十面体。

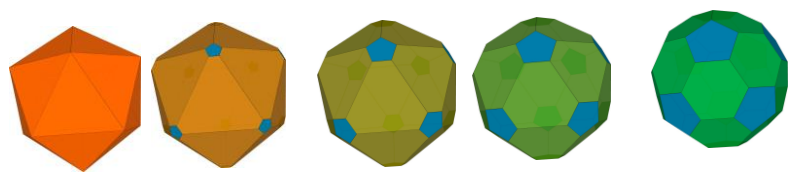


图 2：截角的过程

以上是关于三维足球形状的介绍，那四维的“足球”是指什么呢？其实是三维足球形状在四维空间的类比。既然足球是截角正二十面体，而正二十面体在四维空间中有一个对应的类比，称为四维的正 600 胞体（600-cell），那么对正 600 胞体进行类似的截角操作，得到的形状或许可以称为四维的“足球”。因此，我们首先需要理解什么是 600 胞体。

让我们来看一个例子。如果将三个正三角形围绕一个点放置在平面上，所围成的图形没有完全包裹这个点，会出现一定的空隙。但是，如果我们引入第三个维度，通过类似折纸的操作将这三个三角形拼接在一起，它们将形成一个正四面体的局部结构(一个角)。



图 3：3 个正三角形组成一个正四面体的局部结构

同样地，将四个正三角形拼接在一起，可以构成正八面体的局部结构；将五个正三角形拼接在一起，则可以构成正二十面体的局部结构。

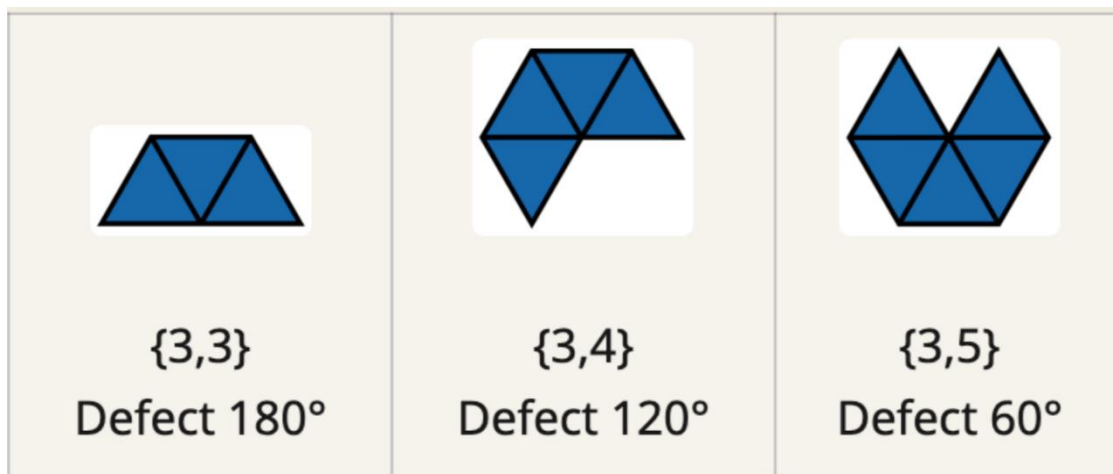


图 4：不同数量的正三角形组成相应正多面体的局部结构

现在我们将这个例子类比到四维空间。如果将三个正四面体围绕一条棱放在一起，在三维空间中会有一定的空隙。然而，如果引入第四个维度并进行折叠操作，这三个正四面体就可以贴合在一起，构成一个四维空间中的立体结构，这就是正五胞体(正五胞体是四维空间中最简单的正多胞体)。

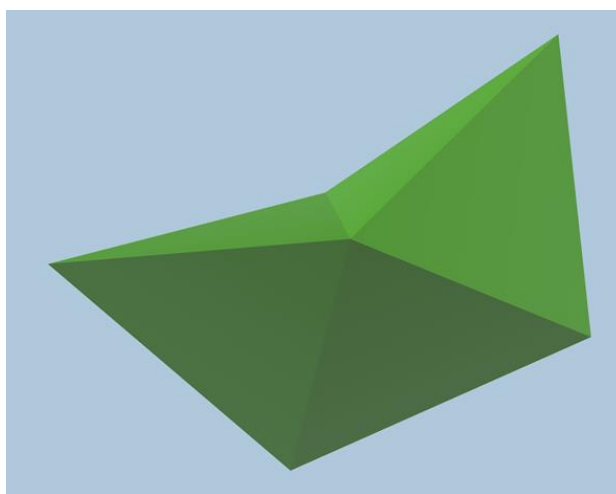


图 5：四维空间中的三个正四面体

同样地，将四个正四面体拼接在一起可以形成一个新的结构：正 16 胞体（16-cell）；将五个正四面体拼接在一起，就构成了正 600 胞体的一个局部结构。正如 5 个三角形组成的局部结构能延展成 20 个三角形面的正 20 面体，正 600 胞体则是由 600 个正四面体组成。

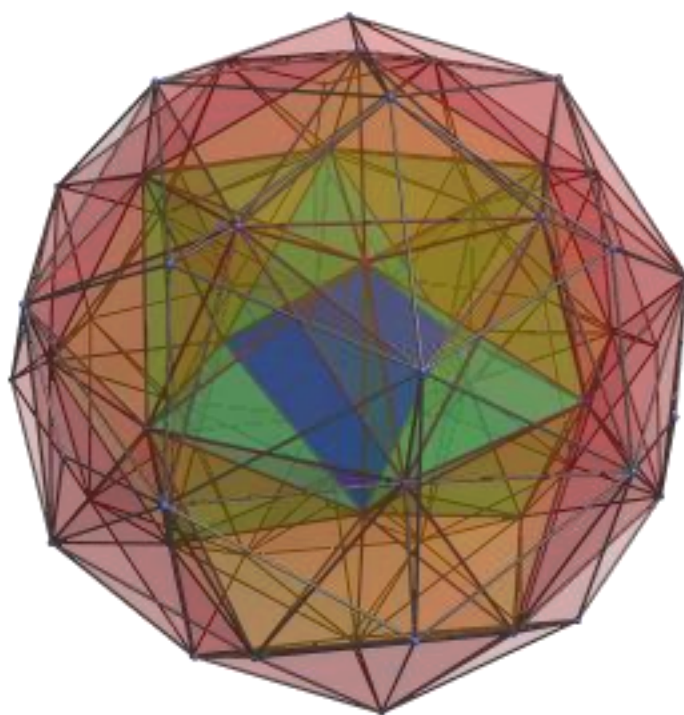


图 6：正 600 胞体几何图案

正 600 胞体也可以在四维空间里进行截角操作，得到一个新的多胞体：截角正 600 胞体(Truncated 600-cell)。这个新的结构不再是正多胞体，而是一个四维的均匀多胞体。

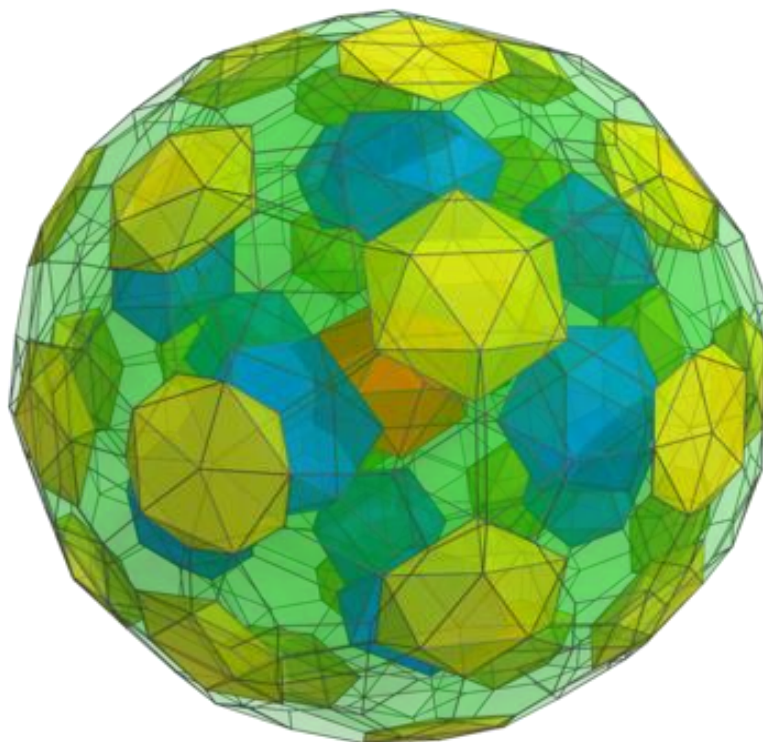


图 7：截角正 600 胞体几何图案

截角正 600 胞体是由哪些部分组成的呢？我们可以通过类比三维图形来理解。考虑正二十面体的截角操作，首先，正二十面体有 20 个三角形的面。在截角之后，这 20 个三角形变成了正六边形。此外，还多出了 12 个正五边形，这些正五边形是由顶点处的截面得到的。

类似地，对于正 600 胞体的截角操作，首先将 600 个正四面体进行截角，得到 600 个截角正四面体。另外，还需要考虑顶点处的截面。由于维度提高了一个维度，这些截面不再叫截

面，而应称为截胞。这个截胞其实就是正二十面体。因此，截角正 600 胞体由 600 个截角正四面体和 120 个正二十面体组成。

由此看来，截角正 600 胞体并不能作为四维“足球”的类比，因为它甚至不包含一个三维的足球。

实际上，对于四维多胞体的操作相比于三维来说更加丰富，有着各种各样类似截角的操作。其中有两个操作可以得到四维空间中的“足球”形状。我们先来介绍第一种操作，即过截角正 600 胞体（Bitruncated 600-cell）。

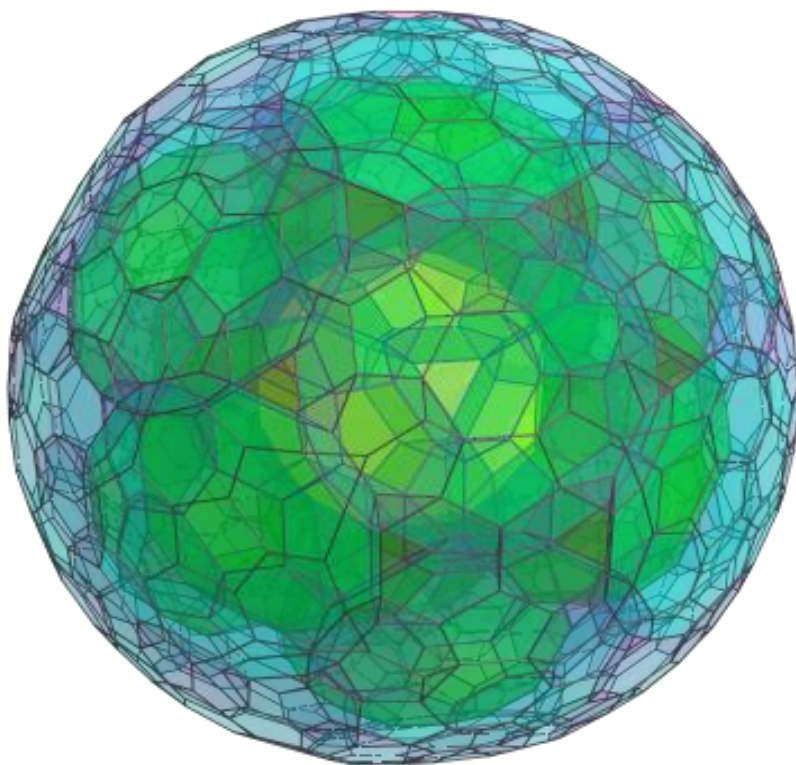


图 8：过截角正 600 胞体几何图案

所谓的过截角操作，就是在进行截角操作结束后，继续沿着类似的操作进行下去。这样就把截角正 600 胞体中的 120 个正二十面体变成了 120 个截角正二十面体。也就是 120 个足球。

下面再介绍第二种四维足球：(Cantitruncated 600-cell)，这种形状在基于第一种足球的基础上，对所有的 720 条棱进行了扩张。得到了 720 个正 5 棱柱(为什么是 5：因为上面说到 600 胞体的结构是 5 个正四面体围绕着一棱)。这附带着也把 600 个截角正四面体进行了扩张，得到了扩张截角正四面体，而这个立体直接等价于截角正八面体。而那 120 个足球并没有结构上的变化。

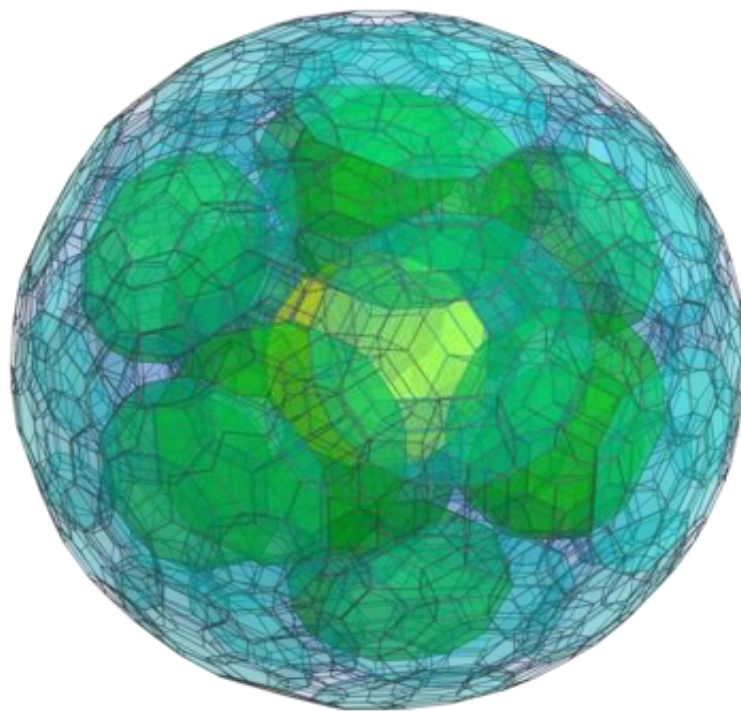


图 9: Cantitruncated 600-cell 几何图案

第二种足球的结构相比于第一种，任意两个三维足球都没有公共部分，可以让 120 个足球完全分散开来，使得在进行可视化时更加清晰地看到三维的足球结构。

我们在厦大德旺图书馆拼搭的 Zometool 四维足球模型，就是上述的第二种四维足球在三维的投影，并且是所有投影中最简单的一种：正交的平行投影，相当于把四维坐标直接拿掉一个。

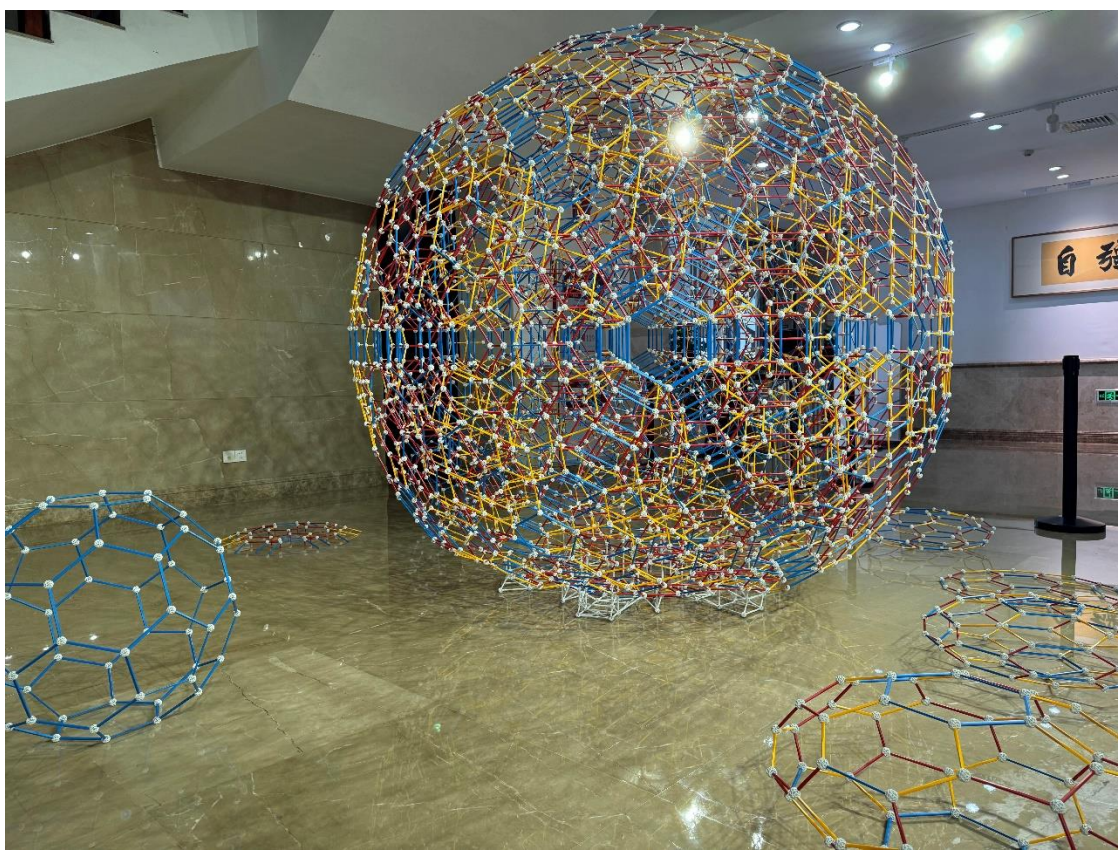


图 10：厦门大学德旺图书馆内的四维足球模型

对于正 600 胞体的 120 个顶点，投影后剩余 75 个三维的顶点。同样，这 120 个三维足球所处的位置和正 600 胞体的顶

点位置一致，所以也会投影到剩下 75 个三维足球。虽然这 75 个足球在四维空间中都是标准的足球形状，但是经过投影之后，由于第四个维度的信息缺失，一些足球在三维中看起来会像是压扁的足球。我们把这 75 个足球根据形状可以分为 5 类，它们的个数分别是 $1+12+20+12+30=75$ 。

- 1 个标准的足球：位于整个模型的最中心，没有因为投影被压扁。
- 12 个稍微压扁，具有 5 重旋转对称的足球，位于模型的第二层。
- 20 个压扁的具有 3 重旋转对称的足球，位于模型的第三层。
- 12 个严重压扁，具有 5 重旋转对称的足球，位于模型的第四层。
- 30 个完全被压扁成平面的足球，位于模型的最外层。

Zometool 是一种用于建立和探索空间结构的建模工具，由不同颜色的棱柱和球体构成。因其稳定性和灵活性，可构建出如多面体、晶体等结构，被广泛应用于数学、化学、计算机、艺术等领域的教育和研究中。

本研究资料由数感星球信息科技（深圳）有限公司提供。